

ANALISIS KESTABILAN MODEL PERSAMAAN GERAK KINCIR AIR

Ayu Fita Purwaningsih

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya
ayuhapip@yahoo.com

Dr. Abadi, M.Sc

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya
abadi4@yahoo.com

Abstrak

Banyak sekali penerapan dari persamaan diferensial dalam dunia sains. Salah satunya dalam bidang sistem kinematik, yakni pada sistem gerak kincir air. Persamaan gerak kincir air dikembangkan dan disederhanakan oleh W.V.R Malkus pada tahun 1970, yang menarik dalam persamaan sederhana kincir air ini memiliki perilaku *chaos* yang terus berkembang. Adanya perilaku *chaos* tersebut dapat diketahui dengan menganalisa perubahan kestabilan dan titik-titik bifurkasi. Pada skripsi ini penulis membahas tentang rekonstruksi persamaan gerak kincir air, kestabilan titik kritis dari persamaan tersebut, dan analisis titik bifurkasi pada persamaan tersebut.

Kata kunci: model persamaan gerak kincir air, kestabilan, bifurkasi

Abstract

Many application of differential equations in science. One of them in the field of kinematic systems, namely the motion system waterwheel. Waterwheel equations of motion are developed and simplified by WVR Malkus in 1970, which is interesting in this waterwheel simple equation has chaotic behavior that continues to grow. The existence of the chaotic behavior can be determined by analyzing the changes in stability and bifurcation points. In this paper the author discusses about reconstruction of motion waterwheel equation, the stability of the critical points in that equation, and analyzes of a bifurcation points in that equation.

Keywords: the equation of motion waterwheel, stability, bifurcation

1 PENDAHULUAN

Banyak sekali penerapan dari persamaan diferensial dalam dunia sains. Salah satunya dalam bidang sistem kinematik, yakni pada sistem gerak kincir air.

Kincir air merupakan sebuah alat berbentuk lingkaran yang bekerja dengan sistem rotasi yang menggunakan air dan merupakan salah satu teknologi rakyat yang ramah lingkungan. Teknologi kincir air ini sebenarnya telah dimanfaatkan berabad-abad yang lalu. Sejak zaman Romawi kuno, cina kuno kincir air telah berguna membantu kehidupan manusia. Misalnya, sebagai pembangkit listrik tenaga air (PLTA), membantu proses irigasi, penggilingan khususnya biji-bijian, dan pada pabrik tekstil (Muhtadi, 2011). Ada empat macam kincir air yaitu kincir air overshoot, kincir air undershot, kincir air breastshot, dan kincir air tub. Satu rangkaian kincir air terdiri dari beberapa kantong bocor, tergantung dari besarnya lingkaran kincir air.

Prinsip kerja dari kincir air tersebut adalah mengubah energi elevasi yang berupa perbedaan ketinggian atas air yang jatuh ke kincir menjadi energi kinetik lalu diubah lagi menjadi energi mekanik pada poros.

Persamaan gerak kincir air dikembangkan dan disederhanakan oleh W.V.R Malkus pada tahun 1970

yang digunakan untuk membantu membuktikan konsep Fisika dari peristiwa *chaos*. *Chaos* merupakan suatu istilah dalam bidang sains untuk suatu sistem dinamik nonlinier yang sangat bergantung pada nilai awal. Yang menarik dalam persamaan sederhana kincir air ini memiliki perilaku *chaos* yang terus berkembang. Adanya perilaku *chaos* tersebut dapat diketahui dengan menganalisa perubahan kestabilan dan titik-titik bifurkasi. Mengingat begitu pentingnya pengembangan persamaan gerak kincir air ini, penulis terinspirasi untuk mengangkat persamaan gerak kincir air sebagai objek dari skripsi ini.

2 KAJIAN PUSTAKA

2.1 KINEMATIKA GERAK MELINGKAR BERATURAN

Gerak melingkar beraturan merupakan gerakan suatu benda yang lintasannya berupa lingkaran, dengan kecepatan (v) tetap, tetapi arah kecepatannya berubah-ubah secara teratur.

Besaran – besaran dalam gerak melingkar beraturan sebagai berikut :

1. Periode dan Frekuensi

Dengan:

T = Periode (s)

f = frekuensi (Hz)

2. Kecepatan Linier rata-rata (v)

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r f \quad (2)$$

3. Kecepatan sudut (angular)

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ atau } \omega = 2\pi f \quad (3)$$

dimana:

ω = kecepatan sudut (rad/s), dimana $\pi = 360^\circ$

4. Hubungan (v) dengan (ω)

Substitusikan persamaan (2.3) ke dalam persamaan (2.2) sehingga diperoleh:

$$v = \omega \cdot r \quad (4)$$

(Umar, 2004)

2.2 Momen Gaya dan Momen inersia

Torsi dilambangkan dengan lambang τ ,

$$\tau = r \cdot F \quad (5)$$

$$\tau = r \cdot F \sin \theta \quad (6)$$

Dengan :

τ = torsi (Nm)

r = panjang sumbu rotasi (m)

F = gaya yang bekerja (N)

θ = sudut antara r dan F

Momen inersia sebuah partikel dapat didefinisikan sebagai hasil kali massa partikel dengan kuadrat jarak partikel dari titik porosnya.

$$I = m \cdot r^2 \quad (7)$$

Dengan:

I = momen inersia (kg.m²)

m = massa benda (kg)

Sedangkan pada hukum II Newton tentang rotasi, Hubungan antara momen gaya (torsi) dan momen inersia adalah sebagai berikut :

$$\tau = I \cdot \dot{\omega} \quad (8)$$

Dengan :

$\dot{\omega}$ = percepatan sudut (rad/s²)

(Abdullah, 2006)

2.3 Energi pada Sistem Gerak

2.3.1 Energi Potensial

$$E_p = m \cdot g \cdot h \quad (9)$$

2.3.1 Energi Kinetik

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 \quad (10)$$

2.3.1 Energi Mekanik

$$E_m = E_p + E_k \quad (11)$$

(Umar, 2004)

2.4 Debit Aliran

Debit aliran dipergunakan untuk menghitung kecepatan aliran pada masing masing pipa eksperimen, diberikan rumus debit aliran sebagai berikut :

$$Q = \frac{\forall}{t} \quad (11)$$

Dimana,

saling independen, fungsi likelihood metode MLE merupakan fungsi linear maka untuk memperoleh Q = debit aliran (m³/s)

\forall = volume fluida (suatu zat yang dapat mengalir)(m³)
(Ridwan, 1997)

2.5 Chaos

Chaos merupakan suatu sistem dinamik nonlinier yang sangat bergantung pada nilai awal yakni (x_0, y_0, z_0) . (Verhulst, 1996)

Secara umum, sistem dinamik kontinu berbentuk persamaan differensial,

$$\dot{x}_n = F(x_n(t)) \quad (12)$$

Dengan $\dot{x}_n = \frac{dx_n(t)}{dt}$ dan $F(x_n(t))$ menyatakan fungsi

dalam $x_n(t)$ dan $t \in R$. t adalah variabel bebas dengan $n \in N$ dimana n menyatakan banyaknya persamaan yang terdapat dalam sistem persamaan tersebut.

Suatu sistem dapat dikatakan *chaos* jika system tersebut mempunyai tiga syarat, yaitu:

1. Sensitif terhadap nilai awal
2. Tidak periodik
3. Memiliki orbit yang padat

2.6 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 2.6 :

Jika A adalah matrik $n \times n$, maka vektor tak nol x di dalam R^n dinamakan vektor eigen dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x , yaitu :

$$Ax = \lambda x \quad (13)$$

Dimana skalar λ disebut nilai eigen dari A dan x dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ .

Untuk mencari nilai eigen matrik A yang berukuran $n \times n$ maka persamaan (2.14) kita menuliskannya kembali $Ax = \lambda x$ sebagai $Ax = \lambda Ix$

$$\Leftrightarrow (A - \lambda I)x = 0 \quad (14)$$

Dan persamaan di atas akan mempunyai penyelesaian jika

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (15)$$

Persamaan (15) disebut persamaan karakteristik A .

(Anton, 1987:277)

2.7 Titik Kritis

Definisi 2.5.1 :

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x), x \in R^n \quad (16)$$

Titik x^* disebut titik kritis dari persamaan (16), jika $f(x^*) = 0$. Titik kritis disebut juga titik tetap atau titik kesetimbangan. (Tu, 1994)

2.8 Pelinieran

Misalkan sistem persamaan diferensial tak linier pada sistem (16) untuk $n = 2$ diberikan sebagai berikut :

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2), \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2) \quad (17)$$

dengan turunan-turunan parsial fungsi f_1 dan f_2 kontinu di R^2 . Dengan menggunakan ekspansi Taylor di sekitar titik kritis (x_1^*, x_2^*) , ruas kanan dari sistem (17). Kemudian persamaan tersebut diekspansi Taylor pada di mana φ_1 dan φ_2 adalah fungsi tak linier dan didefinisikan variabel-variabel baru $\xi_1 = x_1 - x_1^*$ dan $\xi_2 = x_2 - x_2^*$. Secara umum, jika diberikan n persamaan diferensial tak linier

$$\dot{x} = f(x) \quad (19)$$

dengan menggunakan ekspansi Taylor di sekitar titik kritis x^* , maka persamaan (18) dapat ditulis sebagai

$$\dot{x} = Ax + \varphi(x) \quad (20)$$

di mana persamaan (19) adalah persamaan diferensial tak linier dan fungsi tak linier yang memenuhi kondisi

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x} = 0. \text{ Selanjutnya } Ax \text{ pada sistem (20)}$$

merupakan pelinieran dari sistem (20), yang didapatkan dalam bentuk $\dot{x} = Ax$. Matriks koefisien A untuk sistem (20) merupakan matriks Jacobi di sekitar titik kritis x^* . (Tu, 1994)

2.9 Ruang Fase

Ada beberapa kasus nilai eigen pada subbab ini :

1. Jika ketiga nilai eigen bernilai real, berbeda, bertanda sama. Pada kasus ini akan stabil asimtotik jika setiap nilai eigen bernilai negatif. Tidak stabil jika setiap nilai eigen bernilai positif. Nilai eigen ini berbentuk node.
2. Jika nilai eigen real, berbeda dan berbeda tanda. Nilai eigen ini berbentuk pelana (saddle).
3. Komplek sekawan bukan imajiner murni. Pada nilai eigen tersebut berbentuk $\lambda = x \pm iy$, dengan x merupakan bagian real. pada kasus ini nilai eigen berbentuk *fokus (spiral)*, sehingga stabil jika bagian real negatif dan tidak stabil jika bagian real positif.
4. Jika nilai eigen imajiner murni (hanya terdapat bagian imajiner dan tidak ada bagian real). Pada kasus ini nilai eigen berbentuk *pusat (center)*, sehingga stabil. (Verhulst, 1996)

2.10 Deret Fourier

Definisi 2.8 : (Suhaedi, 1994:334)

Misalkan $f(x)$ didefinisikan fungsi periodik dalam interval $(-L, L)$ dan di luar selang ini $f(x + 2L) = f(x)$, yaitu diandaikan bahwa $f(x)$ mempunyai periode $2L$. Maka $f(x)$ dapat dinyatakan dalam bentuk deret yang disebut deret Fourier.

2.11 Bifurkasi

Bifurkasi adalah perubahan kualitatif yang terjadi pada penyelesaian sistem persamaan differensial. Perubahan tersebut meliputi stabilitas, muncul atau hilangnya *limit cycle* dan perubahan banyaknya titik setimbang yang diakibatkan oleh perubahan parameter. Terdapat empat jenis bifurkasi lokal :

1. Bifurkasi Hopf

Bifurkasi yang terjadi berkaitan dengan adanya nilai eigen $\lambda_{1,2} = a \pm ib$ dimana bagian real a dan bagian imajiner $b > 0$ disebut bifurkasi *Hopf (Andronov – Hopf)*. (Kuznetsov, 1998)

2. Bifurkasi saddle-node

Bentuk normal bifurkasi *saddle-node* yang bergantung pada nilai parameter K sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= K - x^2 \\ \dot{K} &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

3. Bifurkasi Transkritikal

Bentuk normal bifurkasi *Transkritikal* yang bergantung pada nilai parameter K sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Kx - x^2 \\ \dot{K} &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

4. Bifurkasi pitchfork

Bentuk normal bifurkasi *pitchfork* yang bergantung pada nilai parameter K sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Kx - x^3 \\ \dot{K} &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

2.12 Limit Cycle

Definisi 2.12:

Sebuah *cycle* dari sistem dinamik kontinu yang pada daerah sekitarnya tidak ada *cycle* lain, disebut *cycle* batas atau *limit cycle*. (Kuznetsov, 1998: 10)

2.13 Persamaan Gerak Kincir Air

Persamaan Gerak Kincir air merupakan model matematika dari gerak atau rotasi pada kincir air. Persamaan kincir air pertama kali ditemukan oleh *Edward Norton Lorenz* pada tahun 1963 (Robinson, 2004). Kemudian dikembangkan oleh W.V.R Malkus pada tahun 1970 yang digunakan untuk membangun atau membuktikan konsep fisika dari peristiwa *chaos*. Persamaan gerak kincir air dapat dituliskan dalam bentuk umum:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\alpha x + \sigma y \\ \dot{y} &= \hat{x}x - Ky - xz \end{aligned} \quad (24)$$

$$\dot{z} = -Kz + xy$$

dengan,

x = nilai kecepatan angular pada kincir

y = nilai komponen horizontal dari pusat massa kincir

z = nilai komponen vertikal dari pusat massa kincir

σ = nilai untuk gaya redaman pada kincir

\hat{x} = nilai dari aliran air yang masuk

K = ketetapan (nilai kebocoran)

Persamaan (23) merupakan persamaan gerak kincir air yang ekuivalen dengan persamaan Lorenz (Moyerman:2006,5).

Parameter pada (23) untuk σ, \hat{x}, K yaitu $\sigma > 0$, $\hat{x} > 0$, dan $K > 0$ (Knill, 2012).

2.14 MatCont

Menurut tutorial matCont yang ditulis Dhooge dkk :

MatCont adalah Matlab grafis paket perangkat lunak untuk studi numerik interaktif sistem dinamis. Hal ini memungkinkan, untuk menghitung kurva kesetimbangan, titik batas, Hopf poin, siklus batas, Periode titik bifurkasi dua kali lipat dari batas siklus,

lipat, flip dan torus bifurkasi poin dari siklus batas (Dhooge, et al, 2006).

3. METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Pada penelitian ini langkah pertama yang dilakukan adalah pendekatan penelitian yang digunakan adalah penelitian kepustakaan (*library research*). Studi kepustakaan merupakan penampilan argumentasi penalaran keilmuan yang memaparkan hasil kajian literatur dan hasil olah pikir peneliti mengenai suatu permasalahan atau topik kajian. Studi kepustakaan berisi satu topik kajian yang di dalamnya memuat beberapa gagasan dan atau proposisi yang berkaitan dan harus didukung oleh data yang diperoleh dari sumber kepustakaan. Sumber kajian pustaka dapat berupa jurnal penelitian, disertasi, tesis, skripsi, laporan penelitian, atau diskusi-diskusi ilmiah. Bahan-bahan pustaka tersebut harus dibahas secara mendalam sehingga mendukung gagasan dan proposisi untuk menghasilkan kesimpulan dan saran.

Langkah berikutnya adalah merumuskan masalah yang diperoleh dari literatur yang ada. Untuk mempermudah dalam mengerjakan tulisan ini maka penulis membuat batasan masalah.

Langkah berikutnya adalah mengkaji teori terkait rumusan masalah yang sudah dirumuskan berdasarkan studi literatur yang dilakukan sebelumnya. Data yang diperlukan dalam penelitian ini adalah data yang bersifat tekstual meliputi persamaan diferensial non linier, pemodelan matematika, dan analisis sistem dinamika model matematika. Dalam memahami data-data yang berupa teks dalam buku-buku literatur diperlukan suatu analisis.

Metode analisis yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deduksi, yaitu cara berpikir yang berangkat dari hal-hal umum menuju kesimpulan yang khusus. Selanjutnya dilakukan analisis secara numerik dengan bantuan Software *MATLAB 7.0* dan *Matcont*. Dari Analisis yang dilakukan dapat ditemukan kesimpulan yang akan menjawab rumusan masalah yang telah dirumuskan sebelumnya.

3.2 Skema Alur Penelitian

Penelitian adalah proses yang sistematis, logis dan empiris untuk mencari kebenaran ilmiah atau pengetahuan ilmiah (Santoso, 2004). Alur penelitian pada skripsi ini sebagai berikut:

1. Studi literatur
2. Merumuskan masalah
3. Merumuskan batasan masalah
4. Mengkaji teori yang terkait
5. Merekonstruksi persamaan gerak kincir air
6. Menentukan persamaan gerak kincir air
7. Melinierisasi persamaan gerak kincir air
8. Menganalisis kestabilan titik kritis dari persamaan gerak kincir air
9. Menganalisis Titik-titik bifurkasi
10. Simulasi Grafik *MATLAB 7.0* *MatCont* 2.4 Interpretasi dari Analisis Simulasi
12. Kesimpulan

4. PEMBAHASAN

4.1 Rekonstruksi Persamaan Gerak Kincir Air

4.1.1 Konservasi Massa

Sebuah kincir terdapat beberapa kantong di setiap sudut kincir yang berisi air.

misal $m(\theta, t)$ massa air pada sudut θ dan waktu t .

$Q(\theta)$ adalah jumlah air yang masuk pada sudut θ (debit air yang masuk). K tetapan (nilai kebocoran).

Misal diambil θ_1 dan θ_2 maka massa total dari air antara dua titik tersebut, θ_1 dan θ_2 diberikan oleh

$$\text{rumus: } M(t) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} m(\theta, t) d\theta$$

(25a)

Berdasarkan perputaran kincir air dari θ_1 dan θ_2 maka diperoleh empat pernyataan yang berhubungan dengan perpindahan massa pada waktu Δt . Empat pernyataan tersebut antara lain :

1. Massa total air yang masuk dari pompa adalah

$$\left[\int_{\theta_1}^{\theta_2} Q(\theta) d\theta \right]$$

2. Massa air yang bocor dari sistem adalah

$$\left[- \int_{\theta_1}^{\theta_2} Km(\theta, t) d\theta \right]$$

3. Massa air yang dibawa dari rotasi kincir air adalah $m(\theta, t)\theta_1\omega\Delta t$, dimana $m(\theta, t)\theta_1$ adalah massa persudut dan $\omega\Delta t$ adalah besar sudut.

4. Massa air yang keluar adalah $-m(\theta, t)\theta_2\omega\Delta t$

Berdasarkan keempat pernyataan tersebut diperoleh total massa sistem:

$$\Delta M = \Delta t \left[\int_{\theta_1}^{\theta_2} Q d\theta - \int_{\theta_1}^{\theta_2} Km(\theta, t) d\theta \right] + m(\theta, t)\theta_1\omega\Delta t - m(\theta, t)\theta_2\omega\Delta t$$

(25b)

Pada (25b) diubah ke dalam bentuk integral, maka dibagi dengan Δt , dan mengambil limit $\Delta t \rightarrow 0$, maka

$$\text{diberikan: } \frac{dM}{dt} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(Q - Km(\theta, t) - \omega \frac{\partial m}{\partial \theta} \right) d\theta$$

(26)

Berdasarkan (25a) total massa setiap waktu diperoleh,

$$\frac{dM}{dt} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\partial m}{\partial t} d\theta$$

(27)

Pada (27) disubstitusikan ke (26) diperoleh:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\partial m(\theta, t)}{\partial t} d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(Q - Km(\theta, t) - \omega \frac{\partial m}{\partial \theta} \right) d\theta$$

(28)

Dari persamaan (28), diperoleh perubahan massa setiap waktu:

$$\frac{\partial m(\theta, t)}{\partial t} = Q(\theta) - Km(\theta, t) - \omega \frac{\partial m(\theta, t)}{\partial \theta}$$

(29)

4.1.2 Keseimbangan Torsi

$$\text{redaman torsi} = -v\omega(t), v > 0$$

(30)

dimana,

v = kecepatan linier

ω = Kecepatan sudut

$\omega(t)$ = kecepatan sudut system

ω_0 = kecepatan sudut awal

ω_f = kecepatan sudut awal saat diberi momentum oleh air

Untuk nilai sudut $d\theta$ kecil sekali, terdapat torsi gravitasi sistem yang diberikan pada persamaan berikut ini:

$$d\tau = m(\theta, t)gr \sin \theta d\theta \quad (31)$$

Dimana,

$m(\theta, t)$ = massa air pada sudut θ dan waktu t

g = gaya gravitasi

r = jari-jari pada kincir air

Dari persamaan (30) dan (31) diperoleh persamaan torsi yang dibentuk dari kecepatan sudut sebagai berikut :

$$\tau = -v\omega + gr \int_{\pi}^{2\pi} m(\theta, t) \sin \theta d\theta \quad (31a)$$

Karena pada persamaan (8) dijelaskan bahwa :

$$\tau = I\dot{\omega}$$

Sehingga diperoleh

$$I\dot{\omega} = -v\omega + gr \int_{\pi}^{2\pi} m(\theta, t) \sin \theta d\theta \quad (31b)$$

4.1.3 Persamaan Amplitudo

Karena $m(\theta, t)$ mempunyai periodik 2π pada θ , maka persamaan $m(\theta, t)$ dapat ditulis kembali ke dalam deret fourier sebagai berikut:

$$m(\theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \cos(n\theta) + b_n(t) \sin(n\theta) \quad (32)$$

Dimana jika persamaan (32) disubstitusikan kepersamaan (29) dan (31b) akan diperoleh a_n dan b_n , yang dikenal sebagai persamaan amplitudo.

Jumlah $Q(\theta)$ diberikan dengan koefisien yang disebut q_n , diasumsikan bahwa air yang ditambahkan secara simetri pada θ , $Q(-\theta) = Q(\theta)$ maka hanya ada bentuk cosinus dan tidak ada bentuk sinus. Sehingga debit air yang masuk dapat ditulis dalam deret fourier sebagai berikut

$$Q(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n \cos(n\theta) \quad (33)$$

Mensubstitusikan persamaan (32) dan (33) ke persamaan (29) diperoleh :

$$1. \quad \dot{a}_n(t) = q_n - Ka_n(t) - \omega b_n(t) \quad (34)$$

$$\dot{b}_n(t) = -Kb_n(t) + \omega a_n(t)$$

(35)

2. Kemudian mensubstitusikan persamaan (32) ke persamaan (31b) diperoleh:

$$\dot{\omega}_1(t) = \frac{-v\omega(t)}{I} + \frac{\pi gr b_1(t)}{I} \quad (36)$$

Persamaan yang menarik adalah untuk $n=1$, karena tidak bergantung dengan suku orde tinggi pada ekspansi Fourier:

$$\dot{a}_1(t) = q_1 - Ka_1(t) - \omega b_1(t) \quad (37)$$

$$\dot{b}_1(t) = -Kb_1(t) + \omega a_1(t) \quad (38)$$

$$\dot{\omega}_1(t) = \frac{-v\omega(t)}{I} + \frac{\pi gr b_1(t)}{I} \quad (39)$$

Sistem persamaan ini dapat diubah dengan sedikit variasi, dengan pengambilan variabel dan pensubstitusian yang benar sebagai berikut :

$$a_1 = \frac{-Kv}{\pi gr} z + \frac{q_1}{K}$$

$$b_1 = \frac{Kv}{\pi gr} y$$

$$\omega = x$$

Dimana bilangan Prandtl adalah $\sigma = \frac{v}{I}$ dan bilangan

Rayleigh adalah $\hat{r} = \frac{\pi gr q_1}{K^2 v} \Rightarrow q_1 = \frac{\hat{r} K v}{\pi gr}$. (Moyerman: 2006, 5)

Sehingga diperoleh sistem sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} &= \hat{r} x - Ky - xz \\ \dot{z} &= -Kz + xy \end{aligned} \quad (40)$$

dengan,

x = nilai kecepatan angular pada kincir

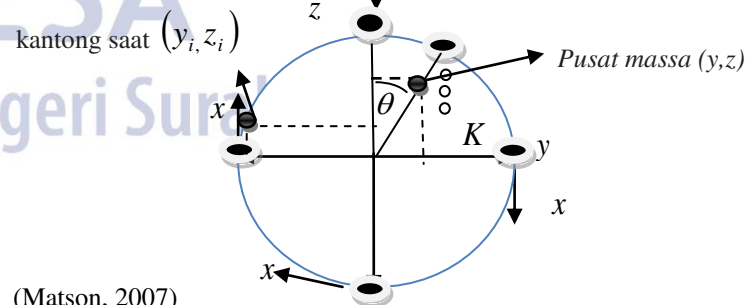
y = nilai komponen horizontal dari pusat massa kincir

z = nilai komponen vertikal dari pusat massa kincir

σ = nilai untuk gaya redaman pada kincir

\hat{r} = nilai dari aliran air yang masuk

K = ketetapan (nilai kebocoran) \hat{r} saat ($y=0, z=r$)



(Matson, 2007)

Persamaan (4.18) merupakan persamaan gerak kincir air yang ekuivalen dengan persamaan Lorenz (Moyerman:2006,5).

Parameter pada (4.18) untuk σ, \hat{r}, K yaitu $\sigma > 0$, $\hat{r} > 0$, dan $K > 0$ (Knill,2012).

Dalam perubahan variabel, parameter K pada persamaan Lorenz (suatu parameter yang sebenarnya tidak dikenal) bernilai $K = 1$, hal ini berarti bahwa kincir (Moyerman : 2006, 5)

Jadi sistem persamaan gerak kincir air adalah :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} &= \hat{r}x - y - xz \\ \dot{z} &= -z + xy\end{aligned}\quad (41)$$

Untuk nilai awal $x_0 = -3$, $y_0 = 4$, dan $z_0 = 20$.

Karena $\sigma - K - 1 > 0$ maka parameter σ yang memenuhi adalah $\sigma > 2$. Pada skripsi ini ditetapkan $\sigma = 10$. (Laning, 2011)

4.2 Penentuan Titik Kritis pada Persamaan Gerak Kincir Air

Dari sistem (41) terdapat tiga titik kritis yang memenuhi dari lima titik kritis,

a. Titik Kritis $T_0 = (0,0,0)$

b. Titik kritis $T_1 = (\sqrt{\hat{r}-1}, \sqrt{\hat{r}-1}, \hat{r}-1)$

c. Titik kritis $T_1 = (-\sqrt{\hat{r}-1}, -\sqrt{\hat{r}-1}, \hat{r}-1)$

4.3 Pelinieran Persamaan Gerak Kincir air

Diperoleh matriks Jacobi A sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \hat{r}-z & -1 & -x \\ y & x & -1 \end{bmatrix}$$

4.4 Analisis Kestabilan Titik Kritis pada Persamaan Gerak Kincir Air

4.4.1 Titik Kritis $T_0 = (0,0,0)$

Karena ditetapkan $\sigma = 10$, maka diperoleh nilai eigen sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -1 \\ \lambda_2 &= -\frac{11}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{81+40\hat{r}} \\ \lambda_3 &= -\frac{11}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{81+40\hat{r}}\end{aligned}\quad (42)$$

Titik kritis T_0 stabil jika masing-masing nilai eigen bernilai negatif, Karena λ_1 bernilai negatif dan diasumsikan semua parameter bernilai positif maka batas parameter aliran air yang masuk pada λ_2 dan λ_3 yang harus dipenuhi agar titik kritis T_0 stabil yaitu $0 < \hat{r} < 1$. Hal ini menunjukkan bahwa karena parameter kebocoran $K = 1$ dan parameter aliran air $0 < \hat{r} < 1$, maka kincir air tidak dapat berotasi. Sehingga diperoleh titik kritis T_0 berupa titik node dan stabil asimtotik. Karena λ_1 , λ_2 dan λ_3 bernilai real, berbeda, dan bertanda sama (negatif).

4.3.2 Titik kritis $T_1 = (\sqrt{\hat{r}-1}, \sqrt{\hat{r}-1}, \hat{r}-1)$

Pada titik kritis T_1 diperoleh solusi sebagai berikut,

Pembentukan model regresi logistik secara individu bertujuan untuk mengetahui variabel bebas mana yang berpengaruh secara individu terhadap

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{at} \cos(bt) + c_3 e^{at} \sin(bt) \quad (43)$$

(Stockie, 2009:8)

Dengan a merupakan $\text{Re}(\lambda)$ dan b merupakan bagian imajiner.

Kestabilan pada titik kritis T_1 dianalisis berdasarkan nilai eigennya sebagai berikut :

a. Titik kritis T_1 stabil jika setiap nilai eigen bernilai

negatif. Karena untuk parameter titik kritis T_1 harus $\hat{r} > 1$ maka batas parameter aliran air yang masuk pada λ_1 , λ_2 dan λ_3 yang harus dipenuhi agar titik kritis T_1 stabil yaitu $1 < \hat{r} < 17.5$. Hal ini menunjukkan bahwa karena parameter kebocoran $K = 1$ dan parameter aliran air $1 < \hat{r} < 17.5$, maka kincir air dapat berotasi. Sehingga diperoleh titik kritis T_1 berupa titik spiral dan stabil asimtotik. Karena λ_1 , λ_2 dan λ_3 bernilai Kompleks sekawan bukan imajiner murni dengan bagian real negatif.

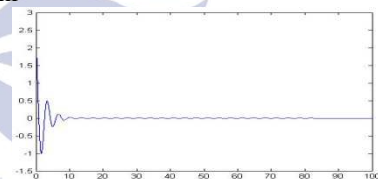
Jika diambil $\hat{r} = 15$ dan $\sigma = 10$ diperoleh,

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -11.05 \\ \lambda_2 &= -0.06 + 4.85i \\ \lambda_3 &= -0.06 - 4.85i\end{aligned}$$

Jika nilai-nilai di atas disubstitusikan ke solusi (43),

$$y(t) = c_1 e^{-11.05t} + c_2 e^{-0.06t} \cos(4.85t) + c_3 e^{-0.06t} \sin(4.85t)$$

Grafik simulasi jika diambil $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ seperti di bawah ini



Gambar 4.5 solusi Titik kritis T_1 stabil

b. Titik kritis T_1 tidak stabil jika setiap nilai eigen bernilai positif. Batas parameter aliran air yang masuk pada λ_1 , λ_2 dan λ_3 yang harus dipenuhi agar titik kritis T_1 tidak stabil yaitu $\hat{r} > 17.5$. Hal ini menunjukkan bahwa karena parameter kebocoran $K = 1$ dan parameter aliran air $\hat{r} > 17.5$, maka kincir air dapat berotasi dan karena nilai parameter aliran air semakin besar maka perputaran kincir air menjadi tidak beraturan. Sehingga diperoleh titik kritis T_1 berupa titik spiral dan tidak stabil. Karena λ_1 , λ_2 dan λ_3 bernilai Kompleks sekawan bukan imajiner murni dengan bagian real positif.

Jika diambil $\hat{r} = 18$ dan $\sigma = 10$ diperoleh,

$$\lambda_1 = -12.02$$

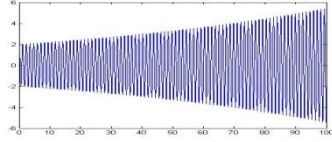
$$\lambda_2 = 0.01 + 5.31i$$

$$\lambda_3 = 0.01 - 5.31i$$

Jika nilai-nilai di atas disubstitusikan ke solusi (43),

$$y(t) = c_1 e^{-12.02t} + c_2 e^{0.01t} \cos(5.31t) + c_3 e^{0.01t} \sin(5.31t)$$

Grafik simulasi jika diambil $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ seperti di bawah ini



Gambar 4.6 solusi Titik kritis T_1 stabil

4.4.3 Titik Kritis $T_1 = (-\sqrt{\hat{r}-1}, -\sqrt{\hat{r}-1}, \hat{r}-1)$

Pada titik kritis T_1 diperoleh solusi sebagai berikut,

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{at} \cos(bt) + c_3 e^{at} \sin(bt) \quad (44)$$

(Stockie, 2009:8)

Dengan a merupakan $\text{Re}(\lambda)$ dan b merupakan bagian imajiner.

Kestabilan pada titik kritis T_2 dianalisis berdasarkan nilai eigennya sebagai berikut :

a. Titik kritis T_2 stabil jika setiap nilai eigen bernilai negatif. Karena untuk parameter titik kritis T_2 harus $\hat{r} > 1$ maka batas parameter aliran air yang masuk pada λ_1, λ_2 dan λ_3 yang harus dipenuhi agar titik kritis T_2 stabil yaitu $1 < \hat{r} < 17.5$. Hal ini menunjukkan bahwa karena parameter kebocoran $K = 1$ dan parameter aliran air $1 < \hat{r} < 17.5$, maka kincir air dapat berotasi. Sehingga diperoleh titik kritis T_2 berupa titik spiral dan stabil asimtotik. Karena λ_1, λ_2 dan λ_3 bernilai Kompleks sekawan bukan imajiner murni dengan bagian real negatif.

Jika diambil $\hat{r} = 15$ dan $\sigma = 10$ diperoleh,

$$\lambda_1 = -11.05$$

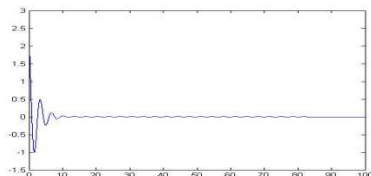
$$\lambda_2 = -0.06 + 4.85i$$

$$\lambda_3 = -0.06 - 4.85i$$

Jika nilai-nilai di atas disubstitusikan ke solusi (44),

$$y(t) = c_1 e^{-11.05t} + c_2 e^{-0.06t} \cos(4.85t) + c_3 e^{-0.06t} \sin(4.85t)$$

Grafik simulasi jika diambil $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ seperti di bawah ini



Gambar 4.7 solusi Titik kritis T_2 stabil

b. Titik kritis T_2 tidak stabil jika setiap nilai eigen bernilai positif. Batas parameter aliran air yang masuk pada λ_1, λ_2 dan λ_3 yang harus dipenuhi agar titik kritis T_2 tidak stabil yaitu $\hat{r} > 17.5$. Hal ini menunjukkan bahwa karena parameter kebocoran $K = 1$ dan parameter aliran air $\hat{r} > 17.5$, maka kincir air dapat berotasi dan karena nilai parameter aliran air semakin besar maka perputaran kincir air menjadi tidak beraturan. Sehingga diperoleh titik kritis T_2 berupa titik spiral dan tidak stabil. Karena λ_1, λ_2 dan λ_3 bernilai Kompleks sekawan bukan imajiner murni dengan bagian real positif.

Jika diambil $\hat{r} = 18$ dan $\sigma = 10$ diperoleh,

$$\lambda_1 = -12.02$$

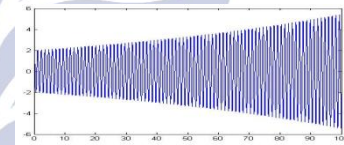
$$\lambda_2 = 0.01 + 5.31i$$

$$\lambda_3 = 0.01 - 5.31i$$

Jika nilai-nilai di atas disubstitusikan ke solusi (44),

$$y(t) = c_1 e^{-12.02t} + c_2 e^{0.01t} \cos(5.31t) + c_3 e^{0.01t} \sin(5.31t)$$

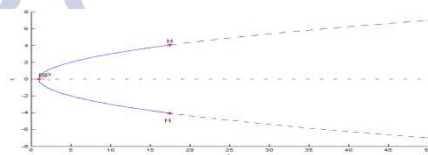
Grafik simulasi jika diambil $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ seperti di bawah ini



Gambar 4.6 solusi Titik kritis T_2 stabil

4.4 Analisis Bifurkasi Titik Kritis dan Simulasinya

Untuk menentukan titik-titik bifurkasi dan jenis bifurkasinya di titik kritis dianalisis secara numerik menggunakan *software MatCont*, diperoleh diagram bifurkasi sebagai berikut:

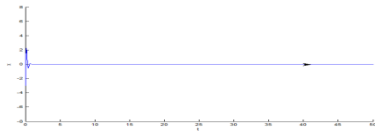


Grafik 4.1 Diagram Bifurkasi Hopf

4.4.1 Titik kritis $T_0 = (0,0,0)$

Pada nilai eigen (4.29) menunjukkan bahwa terdapat bifurkasi saat nilai parameter $\hat{r} = 1$ dan jenis bifurkasinya adalah bifurkasi Hopf (grafik 4.1). Hal ini menunjukkan bahwa untuk titik kritis T_0 stabil saat nilai parameter $0 < \hat{r} < 1$.

Berikut diberikan orbit kestabilan titik kritis T_0 saat $0 < \hat{r} < 1$.



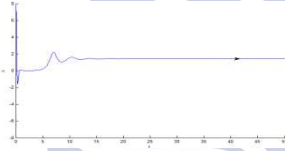
Grafik 4.2 Orbit Kestabilan $\hat{r} = 0.5$

Dari grafik 4.2 menunjukkan bahwa pada titik kritis T_0 yaitu saat $0 < \hat{r} < 1$, diambil nilai parameter $\hat{r} = 0.5$, titik kritis T_0 stabil yang ditunjukkan oleh arah orbit yang menuju titik kritis T_0 .

4.4.2 Titik Kritis $T_1 = (\sqrt{\hat{r}-1}, \sqrt{\hat{r}-1}, \hat{r}-1)$

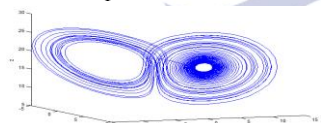
Pada grafik 4.1 terdapat titik H saat $\hat{r} = 17.5$ yang menunjukkan bahwa saat nilai parameter $\hat{r} = 17.5$ terjadi bifurkasi dan jenis bifurkasinya adalah bifurkasi Hopf. Hal ini menunjukkan bahwa untuk titik kritis T_1 stabil saat nilai parameter $1 < \hat{r} < 17.5$, tidak stabil saat $\hat{r} > 17.5$ dan terjadi *limit cycle* saat $26.5 < \hat{r} < 27.2$.

Berikut diberikan orbit kestabilan titik kritis T_1 yang menggambarkan perubahan kestabilan akibat berubahnya nilai parameter aliran air yang masuk pada kincir air sebagai berikut :



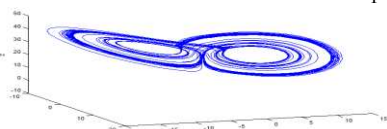
Grafik 4.3 (a) Orbit Kestabilan $\hat{r} = 3$

Dari grafik 4.3 (a) menunjukkan pada titik kritis T_1 yaitu saat $1 < \hat{r} < 17.5$ diambil nilai parameter $\hat{r} = 3$, titik kritis T_1 stabil yang ditunjukkan oleh arah orbit yang menuju ke titik kritis T_1 secara asimtotik.



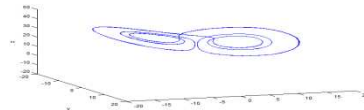
Grafik 4.3 (b) Orbit Kestabilan $\hat{r} = 18$

Dari grafik 4.3 (b) menunjukkan pada titik kritis T_1 yaitu saat $17.5 < \hat{r} < 22$ diambil nilai parameter $\hat{r} = 18$, titik kritis T_1 tidak stabil yang ditunjukkan oleh arah orbit yang awalnya mendekati titik kritis T_1 kemudian semakin menjauh dari titik kritis T_1 .



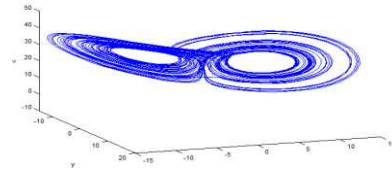
Grafik 4.3 (c) Orbit Kestabilan $\hat{r} = 26.3$

Dari grafik 4.3 (c) menunjukkan pada titik kritis T_1 yaitu saat $22 < \hat{r} < 26.5$ diambil nilai parameter $\hat{r} = 26.3$, titik kritis T_1 tidak stabil yang ditunjukkan oleh arah orbit semakin menjauh dari titik kritis T_1 dan orbit semakin memadat.



Grafik 4.3 (d) Orbit Kestabilan $\hat{r} = 27$

Dari grafik 4.3 (d) menunjukkan pada titik kritis T_1 yaitu saat $26.5 < \hat{r} < 27.2$ diambil nilai parameter $\hat{r} = 27$, titik kritis T_1 tidak stabil yang ditunjukkan oleh adanya *limit cycle*.



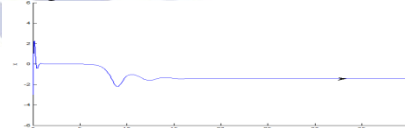
Grafik 4.3 (e) Orbit Kestabilan $\hat{r} = 28$

Dari grafik 4.3 (d) menunjukkan pada titik kritis T_1 yaitu saat $\hat{r} > 27.2$ diambil nilai parameter $\hat{r} = 28$, titik kritis T_1 tidak stabil yang ditunjukkan oleh arah orbit semakin menjauh dari titik kritis T_1 dan orbit berputar berulang-ulang tetapi tidak pernah bertemu karena terjadi chaos.

4.4.3 Titik Kritis $T_2 = (-\sqrt{\hat{r}-1}, -\sqrt{\hat{r}-1}, \hat{r}-1)$

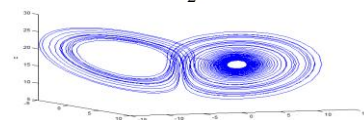
Pada grafik 4.1 terdapat titik H saat $\hat{r} = 17.5$ yang menunjukkan bahwa saat nilai parameter $\hat{r} = 17.5$ terjadi bifurkasi dan jenis bifurkasinya adalah bifurkasi Hopf. Hal ini menunjukkan bahwa untuk titik kritis T_2 stabil saat nilai parameter $1 < \hat{r} < 17.5$, tidak stabil saat $\hat{r} = 17.5$ dan terjadi *limit cycle* saat $26.5 < \hat{r} < 27.2$.

Berikut diberikan orbit kestabilan titik kritis T_2 yang menggambarkan perubahan kestabilan akibat berubahnya nilai parameter aliran air yang masuk pada kincir air sebagai berikut :



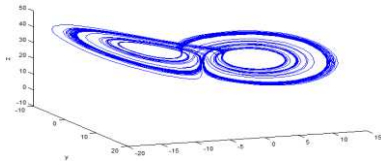
Grafik 4.4 (a) Orbit Kestabilan $\hat{r} = 3$

Dari grafik 4.4 (a) menunjukkan pada titik kritis T_2 yaitu saat $1 < \hat{r} < 17.5$ diambil nilai parameter $\hat{r} = 3$, titik kritis T_2 stabil yang ditunjukkan oleh arah orbit yang menuju ke titik kritis T_2 secara asimtotik.



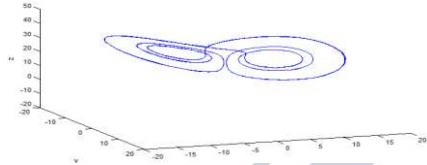
Grafik 4.4 (b) Orbit Kestabilan $\hat{r} = 18$

Dari grafik 4.4 (b) menunjukkan pada titik kritis T_2 yaitu saat $17.5 < \hat{r} < 22$ diambil nilai parameter $\hat{r} = 18$, titik kritis T_2 tidak stabil yang ditunjukkan oleh arah orbit yang awalnya mendekati titik kritis T_2 kemudian semakin menjauh dari titik kritis T_2 .



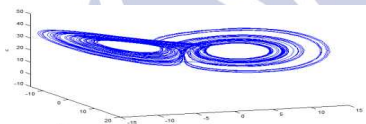
Grafik 4.4 (c) Orbit Kestabilan $\hat{r} = 26.3$

Dari grafik 4.4 (c) menunjukkan pada titik kritis T_2 yaitu saat $22 < \hat{r} < 26.5$ diambil nilai parameter $\hat{r} = 26.3$, titik kritis T_2 tidak stabil yang ditunjukkan oleh arah orbit semakin menjauh dari titik kritis T_2 dan orbit semakin memadat.



Grafik 4.4 (d) Orbit Kestabilan $\hat{r} = 27$

Dari grafik 4.4 (d) menunjukkan pada titik kritis T_2 yaitu saat $26.5 < \hat{r} < 27.2$ diambil nilai parameter $\hat{r} = 27$, titik kritis T_2 tidak stabil yang ditunjukkan oleh adanya *limit cycle*.



Grafik 4.4 (e) Orbit Kestabilan $\hat{r} = 28$

Dari grafik 4.4 (e) menunjukkan pada titik kritis T_2 yaitu saat $\hat{r} > 27.2$ diambil nilai parameter $\hat{r} = 28$, titik kritis T_2 tidak stabil yang ditunjukkan oleh arah orbit semakin menjauh dari titik kritis T_2 dan orbit berputar berulang-ulang tetapi tidak pernah bertemu karena terjadi chaos.

4.4.4 Interpretasi dari Analisis Simulasi

Interpretasi pada Grafik 4.2 adalah kincir air tidak memiliki cukup inersia untuk terus berotasi, sehingga kincir air berhenti berotasi.

Interpretasi pada Grafik 4.3 (a) adalah kincir air dapat berotasi, setelah berjalannya waktu rotasi kincir air menuju ke kecepatan sudut yang konstan dan kincir air berotasi terus-menerus dalam satu arah.

Interpretasi pada Grafik 4.3 (b) jalannya pergerakan kincir yang pada awalnya kincir air berotasi terus menerus dalam satu arah, kemudian seiring berjalannya waktu rotasi kincir air menjadi tidak beraturan (*chaos*).

Interpretasi pada Grafik 4.3 (c) kincir air pada awalnya dapat berotasi secara periodik, kemudian dengan waktu yang lama rotasi kincir air berubah menjadi tidak beraturan karena terjadi *chaos*.

Interpretasi pada Grafik 4.3 (d) kincir air dapat berotasi secara periodik, yakni kincir air berotasi terus menerus dengan arah bolak-balik.

Interpretasi pada Grafik 4.3 (e) kincir air dapat berotasi, dan dengan waktu yang lebih cepat rotasi kincir air menjadi tidak beraturan dimana kincir akan berbalik

arah secara acak (*chaos*), yang disebabkan aliran air yang masuk ke cangkir-cangkir semakin diperbesar sehingga kincir kehilangan keseimbangan. Pola dari rotasi kincir air ini sulit dikenali.

Interpretasi pada Grafik 4.4 (a) adalah kincir air dapat berotasi, setelah berjalannya waktu rotasi kincir air menuju ke kecepatan sudut yang konstan dan kincir air berotasi terus-menerus dalam satu arah.

Interpretasi pada Grafik 4.4 (b) jalannya pergerakan kincir yang pada awalnya kincir air berotasi terus menerus dalam satu arah, kemudian seiring berjalannya waktu rotasi kincir air menjadi tidak beraturan (*chaos*).

Interpretasi pada Grafik 4.4 (c) kincir air pada awalnya dapat berotasi secara periodik, kemudian dengan waktu yang lama rotasi kincir air berubah menjadi tidak beraturan karena terjadi *chaos*.

Interpretasi pada Grafik 4.4 (d) kincir air dapat berotasi secara periodik, yakni kincir air berotasi terus menerus dengan arah bolak-balik.

Interpretasi pada Grafik 4.4 (e) kincir air dapat berotasi, dan dengan waktu yang lebih cepat rotasi kincir air menjadi tidak beraturan dimana kincir akan berbalik arah secara acak (*chaos*), yang disebabkan aliran air yang masuk ke cangkir-cangkir semakin diperbesar sehingga kincir kehilangan keseimbangan. Pola dari rotasi kincir air ini sulit dikenali.

5. PENUTUP

5.1 SIMPULAN

Berdasarkan pada pembahasan, dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut :

1. Persamaan Gerak Kincir Air disajikan dalam bentuk tiga persamaan differensial biasa sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\alpha x + \sigma y \\ \dot{y} &= \hat{r}x - y - xz \\ \dot{z} &= -z + xy\end{aligned}$$

Dimana,

x = nilai kecepatan angular pada kincir

y = nilai komponen horizontal dari pusat massa kincir

z = nilai komponen vertikal dari pusat massa kincir

σ = nilai untuk gaya redaman pada kincir

\hat{r} = nilai dari aliran air yang masuk

2. Dari persamaan Gerak Kincir Air diperoleh tiga titik kritis yang memenuhi sebagai berikut:

- $T_0 = (0,0,0)$
- $T_1 = (\sqrt{\hat{r}-1}, \sqrt{\hat{r}-1}, \hat{r}-1)$
- $T_2 = (-\sqrt{\hat{r}-1}, -\sqrt{\hat{r}-1}, \hat{r}-1)$

3. Dari hasil analisis bifurkasi secara numerik menggunakan *software MatCont*, menunjukkan adanya perubahan kestabilan di masing-masing titik kritis akibat perubahan nilai parameter aliran air yang masuk pada kincir yaitu :

a. Titik kritis T_0 stabil saat nilai parameter aliran air yang masuk pada kincir $0 < \hat{r} < 1$ dan tidak stabil saat nilai parameter aliran air yang masuk pada kincir $\hat{r} > 1$. Dan saat $\hat{r} = 1$ terjadi bifurkasi dengan jenis hopf.

b. Titik kritis T_1 stabil saat nilai parameter aliran air yang masuk pada kincir $1 < \hat{r} < 17.5$, tidak stabil saat nilai parameter aliran air yang masuk pada kincir $\hat{r} > 17.5$ dan terjadi *limitcycle* saat $26.5 < \hat{r} < 27.2$. Dan saat $\hat{r} = 17.5$ terjadi bifurkasi dengan jenis hopf.

c. Titik kritis T_2 stabil saat nilai parameter aliran air yang masuk pada kincir $1 < \hat{r} < 17.5$, tidak stabil saat nilai parameter aliran air yang masuk pada kincir $\hat{r} > 17.5$ dan terjadi *limitcycle* saat $26.5 < \hat{r} < 27.2$. Dan saat $\hat{r} = 17.5$ terjadi bifurkasi dengan jenis hopf.

4. Berdasarkan simulasi yang telah dilakukan, dapat diketahui bahwa persamaan Gerak Kincir Air dipengaruhi oleh nilai dari parameter aliran air yang masuk \hat{r} . Jika aliran air yang masuk semakin diperbesar terus menerus maka rotasi kincir air akan semakin kacau (terjadi *chaos*) dan tidak beraturan, karena kincir air kehilangan keseimbangan.

5.2 SARAN

1. Pada skripsi ini, simulasi persamaan Gerak Kincir Air digunakan ketetapan $K=1$ dan $\sigma=10$. Diharapkan ada pengkajian lebih lanjut untuk nilai K dan σ yang bervariasi.

2. Dalam skripsi ini, simulasi persamaan Gerak Kincir Air menggunakan *software Matlab 7.0* dan bantuan aplikasi *MatCont 2.4*. Diharapkan ada pengkajian selanjutnya secara analitik.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Lynch, Stephen. 2009. *Dynamical Systems with Applications using Mapple*. Menchester Metropolitan university.
- [2] Robinson, R. Clark. 2004. *An Introduction to Dynamical System: Continuous and Discrete*. North western University
- [3] Umar, Efrizon. 2004. *Fisika dan Kecakapan hidup*. Jakarta: Ganesa exact.
- [4] Moyerman, Stephanie. 2006, (Online), (<http://www.math.hmc.edu/~dyong/math164/2006/moyerman/finalreport.pdf> diakses tanggal 12 November 2012)
- [5] Anton. 2000. *Nilai Eigen dan Vektor Eigen*, (Online), ([http://repository.ipb.ac.id/bitstream/handle/123456789/51943/BAB II Tinjauan Puasa.pdf](http://repository.ipb.ac.id/bitstream/handle/123456789/51943/BAB%20II%20Tinjauan%20Puasa.pdf) diakses tanggal 3 maret 2013)
- [6] Suryadi, Suhaedi. 1994. *Matematika Lanjut*. Jakarta: gunadarma.
- [7] Alfian, Aris. 2012. *Sinkronisasi Skew Tent Map Dan Kestabilannya*.
- [8] Kuznetsov, Yu A. 1998. *Element of Applied Bifurcation Theory*. Second Edition. New York: Springer-Verlag.
- [9] Laning, Davidson. 2011. *Investigations of The chaotic water wheel*, (Online), (dave.ucsc.edu/physics195/.../thesis_lanning.pdf diakses 21 Juli 2013)

[10] Kanginan, Marthen. 2002. *Fisika Untuk SMA Kelas XI Semester 2*. Erlangga.

[11] Verhulst, F. 1996. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical System*. Second Edition. New York: Springer-Verlag